Размышления

Для того, чтобы объяснить физическое значение коэффициентов при квадратичных функциях, представим коэффициенты линейной модели не как константы, единые для всей выборки, а как функции от

Где

Отметим тот факт, что функций , одинаково выражающих скорости , может быть бесконечное множество. Например, если представить, что , то такое поле скоростей может описываться следующими наборами функций :

То есть можно сконструировать бесконечное множество функций ,, которые в точности будут описывать наблюдаемое поле скоростей звезд, соответствующее каталогу Gaia DR3 with RV. Как следствие, значения частных производных в точке могут принимать не единственное значение.

Для оценки возможных значений этих производных воспользуемся разложением поля скоростей в ряд Тейлора. Зная формулу разложения функции в ряд Тейлора до второго порядка, несложно получить это разложение для функций в точке .

Изображение выглядит как стол

Автоматически созданное описание

Где, для простоты записи,

Очевидна связь между разложением (13) и значениями коэффициентов квадратичной модели (7)

Квадратичных членов всего 18, а неизвестных частных производных при них 27. Действительно, зная значения коэффициентов квадратичной модели (7) при функциях второго порядка, мы можем рассчитать только значения сумм соответствующих частных производных в нулевой точке, но не имеем возможности однозначно рассчитать составные слагаемые. Например, зная значение , мы можем узнать только в 0, но не имеем возможности рассчитать по-отдельности, поскольку, на самом деле, нам подойдет любая комбинация функций с единственным ограничением на сумму их частных производных в нуле.

Подставив (12) в (13), получаем,

Аналогично, существует бесконечное множество решений ,, подходящих под ограничения.

Позволим себе выбрать один набор функций из множества подходящих. Для этого необходимо уменьшить число неизвестных параметров в (14) с 27 до 18.

Проще всего это сделать, если выбрать такой набор функций, что среди них будут константами во всем пространстве.

Тогда их частные производные зануляются, и (14) можно переписать так (15)

Такая система легко решается

Подставив рассчитанные коэффициенты квадратичной модели из табл. 5 в (15) получим табл. 7

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

Табл. 7

При таком подходе получаем противоречие. Сумма должна быть 0, но она не 0.

Попробуем другой подход

Видим, что довольно много параметров, которые близки к 0. Применим регуляризацию LASSO с alpha = 1.0 при решении квадратичной модели

Заметим, что . Выберем из множества решений такое, где . Отсюда, . Тем самым, . После подстановки значений в (14) получаем, что в качестве подойдет , а в качестве подойдет . Так же заметим, что в качестве решений подойдут , . То есть эффект второго порядка можно объяснить как линейным ростом вдоль оси , так и линейным ростом вдоль оси в зависимости от того, какой набор функций выбрать. С точки зрения наблюдений этот выбор будет равнозначен.

Для упрощения в последующих примерах примем . Ну и, соответственно, .

Заметим, что . Выберем из множества решений такое, где . Тем самым, . После подстановки значений в (14) получаем, что в качестве подойдет , а в качестве подойдет .

Следовательно,

То есть можно считать, что модель второго порядка описывает линейное изменение вдоль оси , чего не делает стандартная модель ОМ.

Заметим, что . Выберем из множества решений такое, где . Отсюда, . Тем самым, . После подстановки значений в (14) получаем, что в качестве подойдет функция , а в качестве подойдет .

Если принять, что – константная функция, то получим

Итог:

Оба подхода показывают, что квадратичная модель описывает следующие эффекты второго порядка

Есть еще второстепенный эффект

Если принять, что

Видим, что частных производных параметров ОМ 27, но коэффициентов квадратичной модели второго порядка всего 18. Получается, что нельзя однозначно выразить все частные производные ОМ через параметры квадратичной модели.

Чтобы это сделать, найдем на самом деле нулевые параметры модели ОМ

Заметим, что нам подойдет такое множество функций

Действительно, если подставить эти функции в (15), то получится чистое равенство.

Подставим (16) в (12) и выразим функции ,, … через

Большинство квадратичных коэффициенты в табл. 5 малы. Применение статистического критерия LASSO с позволяет оставить всего 5 линейных значимых коэффициентов и 6 квадратичных коэффициентов (табл. 6).

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |

Табл. 6. Значимые коэффициенты квадратичной модели, построенной по звездам Gaia DR3 with RV. Ошибки определены через подстановку коэффициентов в МНК и расчет стандартных отклонений от реальных значений скоростей.

Оставшиеся 5 значимых линейных коэффициентов  представляют модель Оорта-Линдблада – плоского вращения Галактики. Отсюда можно сделать вывод, что прочие коэффициенты модели Огородникова-Милна, которых нет в модели Оорта-Линдблада, на самом деле могут целиком входить в параметры движения второго порядка. Смысл соответствующих квадратичных коэффициентов будет определен в следующей статье.

Отметим, что значимыми параметрами модели Огородникова-Милна остаются только и . То есть остальные параметры вращения и деформации становятся незначимыми, если мы начинаем учитывать эффекты второго порядка. Так же отметим отсутствие значимых коэффициентов , что говорит о симметрии движения звезд относительно плоскости Галактики.

(5)

Действительно, значение , посчитанное по звездам до 8 кпк, получается аномально большим. В работах (Цветков, Амосов, ГОД) его значение, посчитанное для звезд до 1 кпк не превышает , а затем почти линейно растет с ростом расстояния до используемых звезд.

Наглядно изобразим их в галактоцентрической системе координат .

Для преобразования координат, мы принимаем положение центра Галактики (Reid M.J.), расстояние до Центра (Abuter R.), высоту Солнца над галактической плоскостью 20.8пк (Bennet), скорость Солнца относительно центра в прямоугольных координатах (Drimmel).

Действительно, если линейную модель (4) перевести в галактоцентрическую систему координат и изобразить полученную формулу на плоскости , то можно увидеть, что центр вращения сдвинут относительно центра Галактики (0, 0) где-то на 7 кпк (рис. 4).

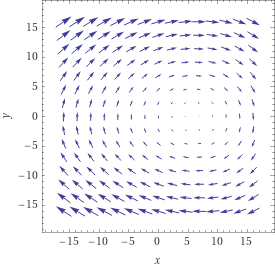
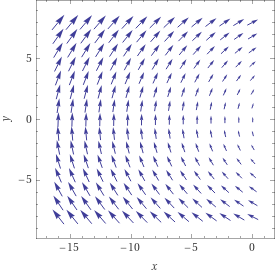


Рис. 6. Линейная модель (4) в галактоцентрической системе координат на плоскости при . Слева уменьшенный, справа увеличенный масштаб. Центр Галактики находится в точке (0, 0).

Посчитать центр аналитически (см. Огородникова)

В то же время центр вращения квадратичной модели (8) при находится точно в центре Галактики (рис. 5).

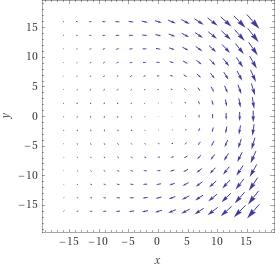
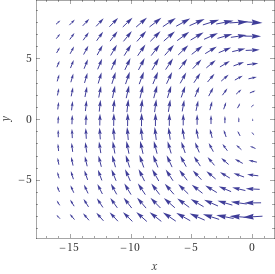


Рис. 7. Квадратичная модель (8) в галактоцентрической системе координат на плоскости при . Слева уменьшенный, справа увеличенный масштаб. Центр Галактики находится в точке (0, 0). Асимметрия скоростей на изображении справа объясняется тем, что за Центром нет звезд из нашей выборки. То есть это просто экстраполирование формулы квардратичной модели (8), построенной по звездам в радиусе 8 кпк от Солнца.

Из анализа рис. 6 и 7 можно сделать вывод, что наблюдаемая систематика в остаточных скоростях, при расчете линейной модели Огородникова-Милна, возникает из-за того, что модель неверно рассчитывает центр вращения Галактики. Отсюда и получаются наблюдаемые искажения.

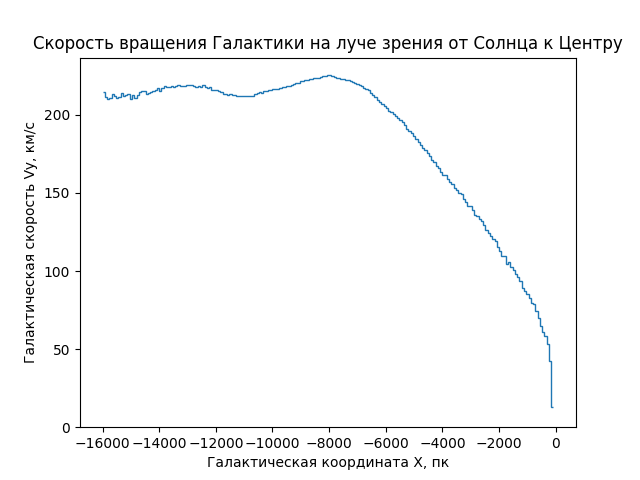


Рис. 8. Кривая вращения Галактики - медианное значение и и в зависимости от для звезд с

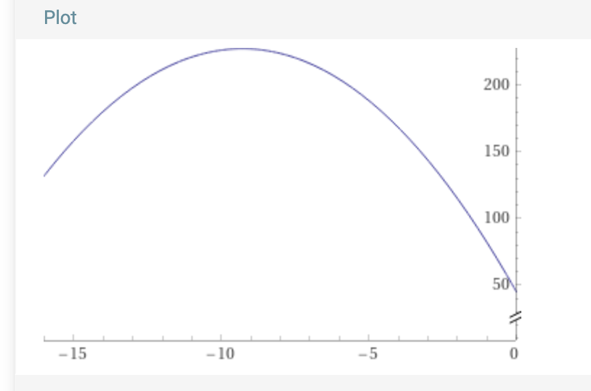


Рис. 9. Значение в зависимости от при переводе квардратичной модели в галактоцентрическую систему координат

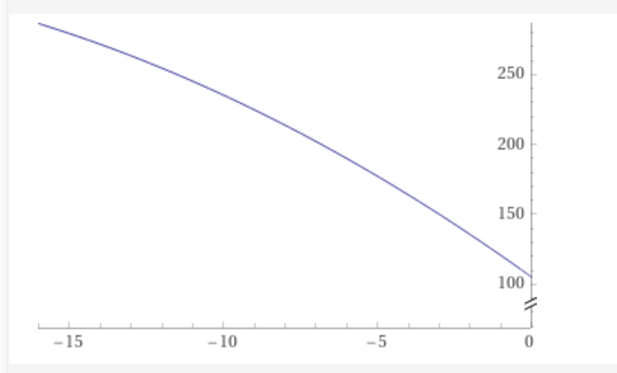


Рис. 10. Значение в зависимости от при переводе линейной модели в галактоцентрическую систему координат

Расчет кривой вращения Галактики (то есть значения вдоль луча к центру Галактики) объясняет, почему линейная модель неверно находит ее Центр (рис. 8). Попытка приблизить (рис. 8) линией (рис. 10) естественным образом приводит к тому, что нулевое значение скорости , соответствующее центру вращения, получается в совершенно неверном месте (далеко не в 0), из-за чего наблюдаются искажения в остаточных скоростях.

Квардратичная модель, в свою очередь, адекватно описывает поведение звезд в Галактике. Ключевым фактором является то, что ее расчет центра вращения совпадает с центром Галактики, полученным совершенно иными способами (Reid M.J, Abuter R, Bennet, Drimmel).

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |